

Adatbank számonkéréshez

- (1) Egy gyárban kétféle személyautót gyártanak: limuzint és kombit. Minden autónak át kell haladnia a festőműhelyen és a motorbeszerelő műhelyen. A festőműhely teljes kapacitása csak limuzinok gyártása esetén 800 autó, csak kombik gyártása esetén pedig 700 autó lenne naponta. A motorbeszerelő műhely csak limuzinok gyártása esetén 1 500 autóval, csak kombik gyártása esetén pedig 1 200 autóval végezne naponta. Minden limuzin 300 euróval, és minden kombi 500 euróval járul hozzá a gyár nyereségéhez. Fogalmazzunk meg egy lineáris programozási modellt és határozzuk meg az optimális megoldást, ha célunk, hogy maximalizáljuk a cég profitját!

Megoldás: A modellben jelölje x_1 a gyártandó limuzinok, x_2 pedig a gyártandó kombik számát! Ekkor:

$$\begin{aligned}x_1, x_2 &\geq 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \\ \frac{x_1}{800} + \frac{x_2}{700} &\leq 1 \\ \frac{x_1}{1500} + \frac{x_2}{1200} &\leq 1 \\ z &= 300x_1 + 500x_2 \rightarrow \max\end{aligned}$$

A Lingo eredményjelentése:

| Lingo 17.0 - [Solution Report - Lingo1] | | | |
|---|------------------|--------------|--|
| File Edit Solver Window Help | | | |
| Global optimal solution found. | | | |
| Objective value: | | 350000.0 | |
| Objective bound: | | 350000.0 | |
| Infeasibilities: | | 0.000000 | |
| Extended solver steps: | | 0 | |
| Total solver iterations: | | 0 | |
| Elapsed runtime seconds: | | 0.14 | |
| Model Class: | | PILP | |
| Total variables: | 2 | | |
| Nonlinear variables: | 0 | | |
| Integer variables: | 2 | | |
| Total constraints: | 3 | | |
| Nonlinear constraints: | 0 | | |
| Total nonzeros: | 6 | | |
| Nonlinear nonzeros: | 0 | | |
| | | | |
| Variable | Value | Reduced Cost | |
| X1 | 0.000000 | -300.0000 | |
| X2 | 700.0000 | -500.0000 | |
| | | | |
| Row | Slack or Surplus | Dual Price | |
| 1 | 0.000000 | 0.000000 | |
| 2 | 0.4166667 | 0.000000 | |
| 3 | 350000.0 | 1.000000 | |

A feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 700 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5/12 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 350\,000.$$

- (2) Kétféle plüssjátékot gyártunk, jegesmedvéket és barnamedvéket. A barnamacik gyártásához 1 kg, a jegesmacik gyártásához 2 kg alapanyag szükséges darabonként. A barnamacik varrása 2 munkaórát igényel és eladási áruk 7 euró, a jegesmacik varrása 1 munkaórát igényel és eladási áruk 8 euró darabonként. Az alapanyagból 2 euró kg-onkénti áron legfeljebb 350 kg szerezhető be, továbbá minden munkaóra költsége 1.5 euró és legfeljebb 400 óra áll rendelkezésünkre. Írjunk fel egy lineáris programozási modellt, mellyel a profitunkat maximalizálhatjuk és adjuk meg az optimális megoldást!

Megoldás: A modellben jelölje x_1 a gyártandó barnamacik, x_2 a gyártandó jegesmacik számát! Ekkor:

$$x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 350$$

$$2x_1 + x_2 \leq 400$$

$$z = 2x_1 + 2.5x_2 \rightarrow \max$$

A Lingo eredményjelentése:

| Lingo 17.0 - [Solution Report - Lingo1] | | | |
|---|------------------|--------------|--|
| File Edit Solver Window Help | | | |
| Global optimal solution found. | | | |
| Objective value: | | 550.0000 | |
| Objective bound: | | 550.0000 | |
| Infeasibilities: | | 0.000000 | |
| Extended solver steps: | | 0 | |
| Total solver iterations: | | 2 | |
| Elapsed runtime seconds: | | 0.07 | |
| Model Class: | | PILP | |
| Total variables: | 2 | | |
| Nonlinear variables: | 0 | | |
| Integer variables: | 2 | | |
| Total constraints: | 3 | | |
| Nonlinear constraints: | 0 | | |
| Total nonzeros: | 6 | | |
| Nonlinear nonzeros: | 0 | | |
| Variable | Value | Reduced Cost | |
| X1 | 150.0000 | -2.000000 | |
| X2 | 100.0000 | -2.500000 | |
| Row | Slack or Surplus | Dual Price | |
| 1 | 0.000000 | 0.000000 | |
| 2 | 0.000000 | 0.000000 | |
| 3 | 550.0000 | 1.000000 | |

A feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 150 \\ 100 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 550.$$

- (3) Egy cég kétféle tápot állít elő az állatállomány részére, mindkettőben a búza és a kukorica a fő alkotóelem. Az **A** jelű tápnak legalább 75 % búzát kell tartalmaznia, a **B** jelű táp viszont pontosan 60 % kukoricát kell tartalmazzon. Az **A** táp eladási ára kg-onként 2 euró, a **B** táp eladási ára kg-onként 1.5 euró. Legfeljebb 1 200 kg búza vásárolható 1 euró egységáron, és legfeljebb 800 kg kukorica 0.8 euró egységáron. Írjunk fel egy matematikai modellt a cég profitjának maximalizálására és adjuk meg az optimális megoldást!

Megoldás: Jelölje x_1 és x_2 rendre az **A** illetve a **B** jelű táp készítéséhez felhasznált búza, továbbá jelölje y_1 és y_2 rendre az **A** illetve a **B** jelű táp készítéséhez felhasznált kukorica mennyiségét kg-ban! Ekkor a modell:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \leq 1200$$

$$y_1 + y_2 \leq 800$$

$$\frac{x_1}{x_1 + y_1} \geq 0.75$$

$$\frac{y_2}{x_2 + y_2} = 0.6$$

$$z = x_1 + 0.5x_2 + 1.2y_1 + 0.7y_2 \rightarrow \max$$

A Lingo eredményjelentése:

| Lingo 17.0 - [Solution Report - Lingo1] | | |
|---|------------------|--------------|
| File Edit Solver Window Help | | |
| Local optimal solution found. | | |
| Objective value: | 1731.430 | |
| Infeasibilities: | 0.5656048E-06 | |
| Extended solver steps: | 5 | |
| Best multistart solution found at step: | 4 | |
| Total solver iterations: | 69 | |
| Elapsed runtime seconds: | 0.25 | |
| Model Class: | NLP | |
| Total variables: | 4 | |
| Nonlinear variables: | 4 | |
| Integer variables: | 0 | |
| Total constraints: | 5 | |
| Nonlinear constraints: | 2 | |
| Total nonzeros: | 12 | |
| Nonlinear nonzeros: | 4 | |
| Variable | Value | Reduced Cost |
| X1 | 857.1436 | 0.000000 |
| X2 | 342.8564 | 0.000000 |
| Y1 | 285.7154 | 0.000000 |
| Y2 | 514.2846 | 0.000000 |
| Row | Slack or Surplus | Dual Price |
| 1 | 0.000000 | 1.357144 |
| 2 | 0.000000 | 0.1285706 |
| 3 | -0.5656048E-06 | -1632.658 |
| 4 | -0.1709971E-07 | 1224.489 |
| 5 | 1731.430 | 1.000000 |

A feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 857.14 \\ 342.86 \\ 285.72 \\ 514.28 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 1731.43.$$

- (4) Az edzés utáni tápanyagszükségletünket háromféle italpor fogyasztásával biztosíthatjuk. Egy kg italpor tartalma a különböző tápanyagokból grammal mérve a következő táblázatban látható:

| | 1. italpor | 2. italpor | 3. italpor |
|------------|------------|------------|------------|
| Fehérje | 870 | 350 | 290 |
| Szénhidrát | 100 | 600 | 700 |
| Vitamin | 30 | 50 | 10 |

Az italporok ára rendre 5 000, 2 500 és 1 500 Ft/kg. A következő időszakban fehérjéből legalább 3 kg-ot, vitaminból legalább 120 grammot, szénhidrátból viszont legfeljebb 1.8 kg-ot szeretnénk fogyasztani. Írjunk fel egy lineáris programozási modellt, mellyel ezek az elvárások minimális költséggel teljesíthetők! Mi lesz az optimális megoldás?

Megoldás: A modellben x_1 , x_2 és x_3 jelöli rendre a három különböző italporból vásárolt mennyiséget kg-ban. Ekkor:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$0.87x_1 + 0.35x_2 + 0.29x_3 \geq 3$$

$$0.1x_1 + 0.6x_2 + 0.7x_3 \leq 1.8$$

$$0.03x_1 + 0.05x_2 + 0.01x_3 \geq 0.12$$

$$z = 5000x_1 + 2500x_2 + 1500x_3 \rightarrow \min$$

A Lingo eredményjelentése:

| Lingo 17.0 - [Solution Report - Lingo1] | | |
|---|----------|--|
| File Edit Solver Window Help | | |
| Global optimal solution found. | | |
| Objective value: | 17151.82 | |
| Infeasibilities: | 0.000000 | |
| Total solver iterations: | 3 | |
| Elapsed runtime seconds: | 0.05 | |
| Model Class: | LP | |
| Total variables: | 3 | |
| Nonlinear variables: | 0 | |
| Integer variables: | 0 | |
| Total constraints: | 4 | |
| Nonlinear constraints: | 0 | |
| Total nonzeros: | 12 | |
| Nonlinear nonzeros: | 0 | |

| Variable | Value | Reduced Cost |
|----------|-----------|--------------|
| X1 | 2.667273 | 0.000000 |
| X2 | 0.4363636 | 0.000000 |
| X3 | 1.816364 | 0.000000 |

| Row | Slack or Surplus | Dual Price |
|-----|------------------|------------|
| 1 | 0.000000 | -5204.545 |
| 2 | 0.000000 | 250.0000 |
| 3 | 0.000000 | -16568.18 |
| 4 | 17151.82 | -1.000000 |

A feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 2.67 \\ 0.44 \\ 1.82 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 17\,151.82.$$

- (5) Egy kiskereskedelmi cég négyféle üdítőt rendel, melyek nagykereskedelmi árai literenként rendre 30, 80, 100 és 120 Ft. Az árrés az egyes termékekre rendre 20, 25, 20 és 15 %. Egy rendelésnél összesen 8000 litert szállítanak, az üdítők csak literes palackokban rendelhetők. A kereslet alapján az első két fajtából rendeli a cég az összmennyiség felét. Az első és a harmadik termékből is legalább 3 000 litert rendel a kereskedő. A negyedik termékből rendelt mennyiség legfeljebb az összmennyiség 10 %-át érheti el. Írjuk fel a feladat matematikai

modelljét, ha a cél az árreszből adódó hozam maximalizálása! Határozzuk meg az optimális megoldást!

Megoldás: A modellben x_1 , x_2 , x_3 és x_4 jelöli rendre az üdítőfajtákból rendelt mennyiségeket literben. Ekkor a modell:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 + x_2 = 4000$$

$$x_1 \geq 3000$$

$$x_3 \geq 3000$$

$$x_4 \leq 800$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8000$$

$$z = 6x_1 + 20x_2 + 20x_3 + 18x_4 \rightarrow \max$$

A Lingo eredményjelentése:

| Lingo 17.0 - [Solution Report - Lingo1] | | | |
|---|----|----------|--|
| File Edit Solver Window Help | | | |
| Global optimal solution found. | | | |
| Objective value: | | 118000.0 | |
| Objective bound: | | 118000.0 | |
| Infeasibilities: | | 0.000000 | |
| Extended solver steps: | | 0 | |
| Total solver iterations: | | 0 | |
| Elapsed runtime seconds: | | 0.14 | |
| Model Class: | | PILP | |
| Total variables: | 4 | | |
| Nonlinear variables: | 0 | | |
| Integer variables: | 4 | | |
| Total constraints: | 6 | | |
| Nonlinear constraints: | 0 | | |
| Total nonzeros: | 13 | | |
| Nonlinear nonzeros: | 0 | | |

| Variable | Value | Reduced Cost |
|----------|----------|--------------|
| X1 | 3000.000 | -6.000000 |
| X2 | 1000.000 | -20.000000 |
| X3 | 4000.000 | -20.000000 |
| X4 | 0.000000 | -18.000000 |

| Row | Slack or Surplus | Dual Price |
|-----|------------------|------------|
| 1 | 0.000000 | 0.000000 |
| 2 | 0.000000 | 0.000000 |
| 3 | 1000.000 | 0.000000 |
| 4 | 800.0000 | 0.000000 |
| 5 | 0.000000 | 0.000000 |
| 6 | 118000.0 | 1.000000 |

A feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 3\,000 \\ 1\,000 \\ 4\,000 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\,000 \\ 800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 118\,000.$$

- (6) Egy cég 100 tonna acél gyártására kapott megrendelést. A szállítmány nikkeltartalma leg-
alább 3.5 tonna, széntartalma legfeljebb 3 tonna, mangántartalma pedig pontosan 4 tonna
kell legyen. A cég bevétele 20 dollár tonnánként. A cég négyféle ötvözzel tudja teljesíteni
a megrendelést, ezek kémiai összetétele a táblázatban látható. A cég maximalizálni akarja a
megrendelésből származó nyereséget. Írjuk fel a megfelelő lineáris programozási feladatot
és adjuk meg az optimális megoldást!

| | 1. ötvözet | 2. ötvözet | 3. ötvözet | 4. ötvözet |
|-----------------|------------|------------|------------|------------|
| Nikkel | 6 % | 3 % | 2 % | 1 % |
| Szén | 3 % | 2 % | 5 % | 6 % |
| Mangán | 8 % | 3 % | 2 % | 1 % |
| Költség / tonna | 12\$ | 10\$ | 8\$ | 6\$ |

Megoldás: Jelölje x_1, x_2, x_3 és x_4 rendre az adott ötvözet mennyiségét a szállítmányban
tonnában felírva! Ekkor a modell:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$$

$$0.06x_1 + 0.03x_2 + 0.02x_3 + 0.01x_4 \geq 3.5$$

$$0.03x_1 + 0.02x_2 + 0.05x_3 + 0.06x_4 \leq 3$$

$$0.08x_1 + 0.03x_2 + 0.02x_3 + 0.01x_4 = 4$$

$$z = 8x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 14x_4 \rightarrow \max$$

A Lingo eredményjelentése:

| | | |
|---|------------------|--------------|
| Lingo 17.0 - [Solution Report - Lingo1] | | |
| File Edit Solver Window Help | | |
| | | |
| Global optimal solution found. | | |
| Objective value: | 1000.000 | |
| Infeasibilities: | 0.000000 | |
| Total solver iterations: | 4 | |
| Elapsed runtime seconds: | 0.11 | |
| Model Class: | LP | |
| Total variables: | 4 | |
| Nonlinear variables: | 0 | |
| Integer variables: | 0 | |
| Total constraints: | 5 | |
| Nonlinear constraints: | 0 | |
| Total nonzeros: | 20 | |
| Nonlinear nonzeros: | 0 | |
| | | |
| Variable | Value | Reduced Cost |
| X1 | 25.00000 | 0.000000 |
| X2 | 62.50000 | 0.000000 |
| X3 | 0.000000 | 0.000000 |
| X4 | 12.50000 | 0.000000 |
| Row | Slack or Surplus | Dual Price |
| 1 | 0.000000 | 16.00000 |
| 2 | 0.000000 | -400.0000 |
| 3 | 0.250000 | 0.000000 |
| 4 | 0.000000 | 200.0000 |
| 5 | 1000.000 | 1.000000 |

A feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 25 \\ 62.5 \\ 0 \\ 12.5 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.25 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 1000.$$

- (7) Egy túrázó a következő havi túratervét szeretné összeállítani. Öt olyan, különböző napokra meghirdetett konkrét eseményt talált, melyeken részt tudna venni. A túrák a helyszín, a táj és a túra egyéb paraméterei alapján különböző élvezeti értékkel bírnak számára. Sajnos az anyagi helyzete miatt nem tud mindegyik túrán részt venni, legfeljebb 25 eurót tud összesen erre a célra költeni. Ezért az alábbi táblázatban összegezte a számára fontos szempontokat:

| Túra helye | Élvezeti érték | Túra hossza | Szintemelkedés | Költség (euró) |
|------------|----------------|-------------|----------------|----------------|
| Mátra | 9 | 20 km | 1 000 m | 8 |
| Bükk | 10 | 28 km | 1 100 m | 10 |
| Zemplén | 8 | 34 km | 900 m | 12 |
| Vértes | 6 | 12 km | 500 m | 5 |
| Mecsek | 7 | 15 km | 700 m | 7 |

A túrázó hónapok óta nem tudott nagyobb túrán részt venni, így most szeretné jól megoldoztatni magát, hogy visszanyerje erőnlétét. Ezért mindenképpen úgy akarja megtervezni a hónapját, hogy a túrákon megtett össztávolság legalább 60 km, össz-szintemelkedés pedig legalább 2 500 méter legyen. A túrázó célja, hogy maximalizálja a túrái során szerzett összes élvezeti értéket. Adjuk meg a probléma matematikai modelljét és az optimális megoldást!

Megoldás: A modellben igen-nem döntési helyzettel állunk szemben, tehát az x_i döntési változók, ahol $i = 1, 2, 3, 4, 5$, rendre bináris változók lesznek, melyek értéke pontosan akkor 1, ha kiválasztjuk az adott túrát, és 0, ha nem választjuk. Ekkor a modell:

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 bináris

$$20x_1 + 28x_2 + 34x_3 + 12x_4 + 15x_5 \geq 60$$

$$1000x_1 + 1100x_2 + 900x_3 + 500x_4 + 700x_5 \geq 2500$$

$$8x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 5x_4 + 7x_5 \leq 25$$

$$z = 9x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 7x_5 \rightarrow \max$$

A Lingo eredményjelentése:

Lingo 17.0 - [Solution Report - Lingo1]
File Edit Solver Window Help
Global optimal solution found.
Objective value: 26.00000
Objective bound: 26.00000
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 0
Total solver iterations: 0
Elapsed runtime seconds: 0.13

Model Class: MILP

Total variables: 5
Nonlinear variables: 0
Integer variables: 5

Total constraints: 4
Nonlinear constraints: 0

Total nonzeros: 20
Nonlinear nonzeros: 0

| Variable | Value | Reduced Cost |
|----------|----------|--------------|
| X1 | 1.000000 | -9.000000 |
| X2 | 1.000000 | -10.00000 |
| X3 | 0.000000 | -8.000000 |
| X4 | 0.000000 | -6.000000 |
| X5 | 1.000000 | -7.000000 |

| Row | Slack or Surplus | Dual Price |
|-----|------------------|------------|
| 1 | 3.000000 | 0.000000 |
| 2 | 300.0000 | 0.000000 |
| 3 | 0.000000 | 0.000000 |
| 4 | 26.00000 | 1.000000 |

A feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 300 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 26.$$

- (8) Egy kapitányság állománya 30 rendőrből áll, akik hetente 5 napot dolgoznak. A hét egyes napjain különböző nagyságú létszám szükséges a szolgálat ellátásához. Vasárnap és hétfőn 18, kedden 24, szerdán 25, csütörtökön 16, pénteken 21, szombaton pedig 28 rendőrnek kell szolgálatot teljesíteni. Hogyan szervezzék meg a munkát, hogy minimális legyen azok száma, akik nem egymás utáni napokon szabadnaposak? Adjuk meg a feladat matematikai modelljét és az optimális megoldást!

Megoldás: A modellben jelölje x_{ij} , ahol $i, j = 1, \dots, 7$ és $i < j$, azon rendőrök számát, akik a hét i -edik és j -edik napján szabadnaposak, a hét első napja legyen hétfő. Ekkor a modell:

$$x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in \mathbb{Z}, i, j = 1, \dots, 7, i < j$$

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} = 12$$

$$x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} = 6$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} = 5$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{45} + x_{46} + x_{47} = 14$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{56} + x_{57} = 9$$

$$x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} + x_{67} = 2$$

$$x_{17} + x_{27} + x_{37} + x_{47} + x_{57} + x_{67} = 12$$

$$z = x_{12} + x_{23} + x_{34} + x_{45} + x_{56} + x_{67} + x_{17} \rightarrow \max$$

A Lingo eredményjelentése:

| Lingo 17.0 - [Solution Report - Lingo1] | | |
|---|-----------|--------------|
| File Edit Solver Window Help | | |
| Global optimal solution found. | | |
| Objective value: | 28.000000 | |
| Objective bound: | 28.000000 | |
| Infeasibilities: | 0.000000 | |
| Extended solver steps: | 0 | |
| Total solver iterations: | 6 | |
| Elapsed runtime seconds: | 0.17 | |
| Model Class: | PILP | |
| Total variables: | 21 | |
| Nonlinear variables: | 0 | |
| Integer variables: | 21 | |
| Total constraints: | 8 | |
| Nonlinear constraints: | 0 | |
| Total nonzeros: | 49 | |
| Nonlinear nonzeros: | 0 | |
| Variable | Value | Reduced Cost |
| X12 | 4.000000 | -1.000000 |
| X13 | 0.000000 | 0.000000 |
| X14 | 0.000000 | 0.000000 |
| X15 | 0.000000 | 0.000000 |
| X16 | 0.000000 | 0.000000 |
| X17 | 8.000000 | -1.000000 |
| X23 | 0.000000 | -1.000000 |
| X24 | 0.000000 | 0.000000 |
| X25 | 0.000000 | 0.000000 |
| X26 | 0.000000 | 0.000000 |
| X27 | 2.000000 | 0.000000 |
| X34 | 5.000000 | -1.000000 |
| X35 | 0.000000 | 0.000000 |
| X36 | 0.000000 | 0.000000 |
| X37 | 0.000000 | 0.000000 |
| X45 | 9.000000 | -1.000000 |
| X46 | 0.000000 | 0.000000 |
| X47 | 0.000000 | 0.000000 |
| X56 | 0.000000 | -1.000000 |
| X57 | 0.000000 | 0.000000 |
| X67 | 2.000000 | -1.000000 |

A feladat optimális megoldásában $x_{12} = 4$, $x_{17} = 8$, $x_{27} = 2$, $x_{34} = 5$, $x_{45} = 9$ és $x_{67} = 2$, az összes többi döntési változó, továbbá az eltérésváltozók értéke 0. Az optimális célérték 28.

- (9) Egy vállalkozó három irodaház építésének sorrendjét kívánja eldönteni. Az építés időtartama és a szükséges szakmunkások száma az alábbi táblázatban látható:

| | Építési idő (év) | szakmunkások száma |
|-----------|------------------|--------------------|
| 1. épület | 2 | 30 |
| 2. épület | 2 | 20 |
| 3. épület | 3 | 20 |

Ha egy épület kész, akkor évente az alábbi nagyságú bérleti díjat hozza: 1. épület 5 millió Ft, 2. épület 3 millió Ft, 3. épület 4 millió Ft. A vállalkozónak az alábbi feltételekkel kell szembenéznie:

- minden évben legfeljebb 60 szakmunkás áll rendelkezésére,
- minden évben csak egy építkezés kezdődhet,
- a 2. épület építését a 4. év végéig be kell fejezni.

Milyen sorrend esetén lesz a 4. év végéig beszédett bérleti díj maximális? Adjuk meg a feladat matematikai modelljét és az optimális megoldást!

Megoldás: A feladatban igen-nem döntések sorozatát kell meghoznunk. Legyen az x_{it} döntési változók értéke 1 pontosan akkor, ha az i -edik épület építése a t -edik évben kezdődik, és 0, ha nem (ahol $i = 1, 2, 3$ és $t = 1, 2, 3, 4$). Ekkor:

$$x_{it} \text{ bináris, } i = 1, 2, 3, t = 1, 2, 3, 4$$

$$30x_{11} + 20x_{21} + 20x_{31} \leq 60$$

$$30 \cdot (x_{11} + x_{12}) + 20 \cdot (x_{21} + x_{22}) + 20 \cdot (x_{31} + x_{32}) \leq 60$$

$$30 \cdot (x_{12} + x_{13}) + 20 \cdot (x_{22} + x_{23}) + 20 \cdot (x_{31} + x_{32} + x_{33}) \leq 60$$

$$30 \cdot (x_{13} + x_{14}) + 20 \cdot (x_{23} + x_{24}) + 20 \cdot (x_{32} + x_{33} + x_{34}) \leq 60$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 1$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$$

$$z = 10x_{11} + 5x_{12} + 6x_{21} + 3x_{22} + 4x_{31} \rightarrow \max$$

Az optimális megoldásban $x_{11} = 1$ és $x_{22} = 1$, a többi döntési változó értéke 0. Az optimális célérték 13.

(10) Négy konkrét befektetési lehetőséget vizsgálunk. A befektetések hozamának nettó jelenértéke rendre 16 000, 22 000, 12 000 és 8 000 euró. Az egyes befektetések jelenbeni készpénzigénye rendre 5 000, 7 000, 4 000 és 3 000 euró. Jelen pillanatban 14 000 euró készpénz a befektethető összeg, tömrészt nem vásárolhatunk. Adjuk meg a modellt és az optimális megoldást mindegyik esetben külön a következő követelményeknek megfelelően:

1. A cég legfeljebb két befektetésbe szállhat be.
2. Ha a cég a második lehetőségbe befektet, akkor az elsőbe is be kell fektetnie.
3. Ha a cég a második lehetőségbe befektet, akkor a negyediket már nem választhatja.

Megoldás: Értelmezzük a döntési változókat $i = 1, 2, 3, 4$ esetén a következő módon:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{ha befektetünk az } i\text{-edik lehetőségbe,} \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$$

A feladat modellje:

x_1, x_2, x_3, x_4 bináris

$$5000x_1 + 7000x_2 + 4000x_3 + 3000x_4 \leq 14000$$

$$z = 16000x_1 + 22000x_2 + 12000x_3 + 8000x_4 \rightarrow \max$$

1. Ha a cég legfeljebb két befektetésbe szállhat be, ki kell egészítenünk a modellt:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$$

Az optimális megoldás ekkor az első és a második befektetés választása, a célérték 38 000.

2. Ha a cég a második lehetőségbe befektet, akkor az elsőbe is be kell fektetnie:

$$x_2 \leq x_1$$

Az optimális megoldás megegyezik az 1. részben megadottal.

3. Ha a cég a második lehetőségbe befektet, akkor a negyediket már nem választhatja:

$$x_2 + x_4 \leq 1$$

Az optimális megoldás megegyezik az 1. részben megadottal.

(11) Négy konkrét befektetési lehetőséget vizsgálunk. A befektetések hozamának nettó jelenértéke rendre 5 000, 8 000, 6 000 és 7 000 euró. Az egyes befektetések jelenbeni készpénzigénye rendre 3 000, 5 000, 4 000 és 6 000 euró. Jelen pillanatban 12 000 euró készpénz a befektethető összeg, a befektetésekből tömrészt nem vásárolhatunk. Írjuk fel a probléma matematikai modelljét és adjuk meg az optimális megoldást, ha célunk, hogy maximalizáljuk a befektetések összhozamának nettó jelenértékét! Egészítsük ki a modellt a következő megszorítással: ha a 2. és a 3. befektetést is kiválasztjuk, akkor a 4. befektetést is választanunk kell!

Megoldás: Értelmezzük a döntési változókat $i = 1, 2, 3, 4$ esetén a következő módon:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{ha befektetünk az } i\text{-edik lehetőségbe,} \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$$

A feladat modellje:

x_1, x_2, x_3, x_4 bináris

$$3000x_1 + 5000x_2 + 4000x_3 + 6000x_4 \leq 12000$$

$$z = 5000x_1 + 8000x_2 + 6000x_3 + 7000x_4 \rightarrow \max$$

A modell kiegészítése:

$$x_2 + x_3 \leq x_4 + 1$$

A Lingo eredményjelentése:

| | | |
|--------------------------------------|------------------|--------------|
| Lingo 17.0 - [Solution Report - sz8] | | |
| File Edit Solver Window Help | | |
| | | |
| Global optimal solution found. | | |
| Objective value: | 15000.00 | |
| Objective bound: | 15000.00 | |
| Infeasibilities: | 0.000000 | |
| Extended solver steps: | 0 | |
| Total solver iterations: | 0 | |
| Elapsed runtime seconds: | 0.18 | |
| Model Class: | PILP | |
| Total variables: | 4 | |
| Nonlinear variables: | 0 | |
| Integer variables: | 4 | |
| Total constraints: | 3 | |
| Nonlinear constraints: | 0 | |
| Total nonzeros: | 11 | |
| Nonlinear nonzeros: | 0 | |
| Variable | Value | Reduced Cost |
| X1 | 0.000000 | -5000.000 |
| X2 | 1.000000 | -8000.000 |
| X3 | 0.000000 | -6000.000 |
| X4 | 1.000000 | -7000.000 |
| Row | Slack or Surplus | Dual Price |
| 1 | 1000.000 | 0.000000 |
| 2 | 1.000000 | 0.000000 |
| 3 | 15000.00 | 1.000000 |

A feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 1000 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 15000.$$

- (12) Egy vállalkozásnak a következő 4 hónap mindegyikének elején vannak bevételei és ki kell fizetnie a számlákat. Az összegeket a következő táblázat tartalmazza:

| | bevételek (ezer Ft) | számlák (ezer Ft) |
|----------|---------------------|-------------------|
| 1. hónap | 600 | 600 |
| 2. hónap | 800 | 500 |
| 3. hónap | 300 | 500 |
| 4. hónap | 300 | 250 |

A számlák kiegyenlítése után fennmaradó összeg leköthető

1 hónapra 2%-os kamatra,
 2 hónapra 4%-os kamatra,
 3 hónapra 6%-os kamatra,
 4 hónapra 9%-os kamatra.

Az 1. hónap elején a vállalkozásnak 500 000 Ft készpénze van. Az egyes hónapok elején mennyi pénzt, hány hónapra kössön le a cég vezetője ahhoz, hogy az ötödik hónap elején maximális mennyiségű készpénze álljon rendelkezésre? Adjuk meg a probléma matematikai modelljét és határozzuk meg az optimális megoldást!

Megoldás: A modellben jelölje x_{ij} az i -edik hónap elején j hónapra lekötött összeget! Ekkor a modell feltételei mérlegegyenletek:

$$x_{ij} \geq 0$$

$$500\,000 + 600\,000 = 600\,000 + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}$$

$$1.02x_{11} + 800\,000 = 500\,000 + x_{21} + x_{22} + x_{23}$$

$$1.02x_{21} + 1.04x_{12} + 300\,000 = 500\,000 + x_{31} + x_{32}$$

$$1.02x_{31} + 1.04x_{22} + 1.06x_{13} + 300\,000 = 250\,000 + x_{41}$$

$$z = 1.09x_{14} + 1.06x_{23} + 1.04x_{32} + 1.02x_{41} \rightarrow \max$$

A Lingo eredményjelentése:

| Lingo 17.0 - [Solution Report - esett] | | |
|--|------------------|---------------|
| File Edit Solver Window Help | | |
| Global optimal solution found. | | |
| Objective value: | 706282.4 | |
| Infeasibilities: | 0.000000 | |
| Total solver iterations: | 2 | |
| Elapsed runtime seconds: | 0.13 | |
| Model Class: LP | | |
| Total variables: | 10 | |
| Nonlinear variables: | 0 | |
| Integer variables: | 0 | |
| Total constraints: | 5 | |
| Nonlinear constraints: | 0 | |
| Total nonzeros: | 20 | |
| Nonlinear nonzeros: | 0 | |
| | | |
| Variable | Value | Reduced Cost |
| X11 | 0.000000 | 0.7567840E-02 |
| X12 | 0.000000 | 0.7984000E-02 |
| X13 | 0.000000 | 0.8800000E-02 |
| X14 | 500000.0 | 0.000000 |
| X21 | 300000.0 | 0.000000 |
| X22 | 0.000000 | 0.4080000E-03 |
| X23 | 0.000000 | 0.1208000E-02 |
| X31 | 106000.0 | 0.000000 |
| X32 | 0.000000 | 0.4000000E-03 |
| X41 | 158120.0 | 0.000000 |
| Row | Slack or Surplus | Dual Price |
| 1 | 0.000000 | -1.090000 |
| 2 | 0.000000 | -1.061208 |
| 3 | 0.000000 | -1.040400 |
| 4 | 0.000000 | -1.020000 |
| 5 | 706282.4 | 1.000000 |

A feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 500\,000 \\ 300\,000 \\ 0 \\ 0 \\ 106\,000 \\ 0 \\ 158\,120 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 706\,282.4.$$

- (13) Egy vállalat kétféle izzót gyárt autókhoz. A féklámpaizzók 2 euró, a fényszóróizzók 5 euró profitot hoznak a cégnek darabonként. Egy darab féklámpaizzóhoz 3 egység, egy darab fényszóróizzóhoz 6 egység alapanyagot kell felhasználni. Összesen 120 egység alapanyag áll a cég rendelkezésére. A féklámpaizzók gyártásának beindítási költsége 10 euró, a fényszóróizzók esetén ez 20 euró. Írjunk fel egy matematikai modellt, mellyel maximalizálható a cég profitja és határozzuk meg az optimális megoldást!

Megoldás: A modellben jelölje x_1 és x_2 rendre a gyártandó féklámpaizzók illetve fényszóróizzók számát, továbbá y_1 illetve y_2 értéke legyen 1 pontosan akkor, ha gyártunk féklámpaizzót illetve fényszóróizzót, és 0, ha az adott terméket nem gyártjuk. Ekkor a feladat modellje:

$$\begin{aligned}x_1, x_2 &\geq 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, y_1, y_2 \text{ bináris} \\3x_1 + 6x_2 &\leq 120 \\x_1 &\leq 40y_1 \\x_2 &\leq 20y_2 \\z = 2x_1 + 5x_2 - 10y_1 - 20y_2 &\rightarrow \max\end{aligned}$$

A Lingo eredményjelentése:

| Lingo 17.0 - [Solution Report - sz8] | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|------------------|--------------|----------|------------------|--------------|----|----------|-----------|----|----------|-----------|----|----------|----------|----|----------|----------|
| File Edit Solver Window Help | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Global optimal solution found. | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Objective value: | 80.00000 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Objective bound: | 80.00000 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Infeasibilities: | 0.000000 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Extended solver steps: | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Total solver iterations: | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Elapsed runtime seconds: | 0.15 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Model Class: | PILP | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Total variables: | 4 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Nonlinear variables: | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Integer variables: | 4 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Total constraints: | 4 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Nonlinear constraints: | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Total nonzeros: | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Nonlinear nonzeros: | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table> <tr> <th>Variable</th><th>Value</th><th>Reduced Cost</th></tr> <tr> <td>X1</td><td>0.000000</td><td>-2.000000</td></tr> <tr> <td>X2</td><td>20.00000</td><td>-5.000000</td></tr> <tr> <td>Y1</td><td>0.000000</td><td>10.00000</td></tr> <tr> <td>Y2</td><td>1.000000</td><td>20.00000</td></tr> </table> | | | Variable | Value | Reduced Cost | X1 | 0.000000 | -2.000000 | X2 | 20.00000 | -5.000000 | Y1 | 0.000000 | 10.00000 | Y2 | 1.000000 | 20.00000 |
| Variable | Value | Reduced Cost | | | | | | | | | | | | | | | |
| X1 | 0.000000 | -2.000000 | | | | | | | | | | | | | | | |
| X2 | 20.00000 | -5.000000 | | | | | | | | | | | | | | | |
| Y1 | 0.000000 | 10.00000 | | | | | | | | | | | | | | | |
| Y2 | 1.000000 | 20.00000 | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table> <tr> <th>Row</th><th>Slack or Surplus</th><th>Dual Price</th></tr> <tr> <td>1</td><td>0.000000</td><td>0.000000</td></tr> <tr> <td>2</td><td>0.000000</td><td>0.000000</td></tr> <tr> <td>3</td><td>0.000000</td><td>0.000000</td></tr> <tr> <td>4</td><td>80.00000</td><td>1.000000</td></tr> </table> | | | Row | Slack or Surplus | Dual Price | 1 | 0.000000 | 0.000000 | 2 | 0.000000 | 0.000000 | 3 | 0.000000 | 0.000000 | 4 | 80.00000 | 1.000000 |
| Row | Slack or Surplus | Dual Price | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0.000000 | 0.000000 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 0.000000 | 0.000000 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 0.000000 | 0.000000 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 80.00000 | 1.000000 | | | | | | | | | | | | | | | |

A feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 80.$$

- (14) Egy nagy cég 1 100 darab számítógépet szeretne vásárolni. Három ajánlatot kaptak. Az első ajánlatot adó cég legfeljebb 500 gépet tud szállítani gépenként 500 eurós áron, és a gépek üzembe helyezéséért további 5 000 eurót kérnek. A második ajánlatot adó cég legfeljebb 900 gépet szállít gépenként 350 eurós áron, és az üzembe helyezéséért további 4 000 eurót kérnek. A harmadik ajánlatot adó cég legfeljebb 400 gépet szállít gépenként 250 eurós áron, és az üzembe helyezéséért további 6 000 eurót kérnek. Írjunk fel egy lineáris programozási modellt, mellyel minimalizálható a gépek beszerzésének összköltsége és határozzuk meg az optimális megoldást!

Megoldás: A modellben jelölje x_1, x_2, x_3 rendre az adott szállítótól rendelt gépek számát, továbbá legyen y_1, y_2, y_3 értéke 1 pontosan akkor, ha rendelünk az adott szállítótól, és 0 pontosan akkor, ha nem rendelünk. A feladat modellje:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}, y_1, y_2, y_3 \text{ bináris}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1100$$

$$x_1 \leq 500y_1$$

$$x_2 \leq 900y_2$$

$$x_3 \leq 400y_3$$

$$z = 500x_1 + 350x_2 + 250x_3 + 5000y_1 + 4000y_2 + 6000y_3 \rightarrow \min$$

A Lingo eredményjelentése:

| Lingo 17.0 - [Solution Report - sz8] | | | |
|--------------------------------------|------------------|--------------|--|
| File Edit Solver Window Help | | | |
| Global optimal solution found. | | | |
| Objective value: | | 355000.0 | |
| Objective bound: | | 355000.0 | |
| Infeasibilities: | | 0.000000 | |
| Extended solver steps: | | 0 | |
| Total solver iterations: | | 0 | |
| Elapsed runtime seconds: | | 0.15 | |
| Model Class: | | PILP | |
| Total variables: | 6 | | |
| Nonlinear variables: | 0 | | |
| Integer variables: | 6 | | |
| Total constraints: | 5 | | |
| Nonlinear constraints: | 0 | | |
| Total nonzeros: | 15 | | |
| Nonlinear nonzeros: | 0 | | |
| Variable | Value | Reduced Cost | |
| X1 | 0.000000 | 500.0000 | |
| X2 | 700.0000 | 350.0000 | |
| X3 | 400.0000 | 250.0000 | |
| Y1 | 0.000000 | 5000.000 | |
| Y2 | 1.000000 | 4000.000 | |
| Y3 | 1.000000 | 6000.000 | |
| Row | Slack or Surplus | Dual Price | |
| 1 | 0.000000 | 0.000000 | |
| 2 | 0.000000 | 0.000000 | |
| 3 | 200.0000 | 0.000000 | |
| 4 | 0.000000 | 0.000000 | |
| 5 | 355000.0 | -1.000000 | |

A feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 700 \\ 400 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 355\,000.$$

- (15) Magyarországon 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1 000, 2 000, 5 000, 10 000 és 20 000 Forintos címletek vannak forgalomban. Írjunk fel egy olyan matematikai modellt, mellyel tetszőleges (5-tel osztható) összeg esetén meghatározható, hogy miként lehet a legkevesebb számú címlettel kifizetni!

Megoldás: A modellben jelölje az x_i változó azt, hogy hány darabot használunk fel az i névértékű címletből, tehát i értéke lehet 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1 000, 2 000, 5 000, 10 000, 20 000. Továbbá legyen c az a (5-tel osztható) pénzösszeg, amit minimális számú címlettel szeretnénk kifizetni. Ekkor a modell:

$$x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{Z} \text{ minden } i\text{-re}$$

$$\begin{aligned} 5x_5 + 10x_{10} + 20x_{20} + 50x_{50} + 100x_{100} + 200x_{200} + 500x_{500} + 1000x_{1000} + \\ + 2000x_{2000} + 5000x_{5000} + 10000x_{10000} + 20000x_{20000} = c \end{aligned}$$

$$z = x_5 + x_{10} + x_{20} + x_{50} + x_{100} + x_{200} + x_{500} + x_{1000} + x_{2000} + x_{5000} + x_{10000} + x_{20000} \rightarrow \min$$

Például legyen a minimális számú címlettel kifizetendő összeg $c = 775\,290$ Forint. Ekkor a Lingo eredményjelentése:

| Lingo 17.0 - [Solution Report - címlet] | | |
|---|------------------|--------------|
| File Edit Solver Window Help | | |
| Global optimal solution found. | | |
| Objective value: | 44.00000 | |
| Objective bound: | 44.00000 | |
| Infeasibilities: | 0.000000 | |
| Extended solver steps: | 26 | |
| Total solver iterations: | 333 | |
| Elapsed runtime seconds: | 0.31 | |
| Model Class: MILP | | |
| Total variables: | 12 | |
| Nonlinear variables: | 0 | |
| Integer variables: | 12 | |
| Total constraints: | 2 | |
| Nonlinear constraints: | 0 | |
| Total nonzeros: | 24 | |
| Nonlinear nonzeros: | 0 | |
| | | |
| Variable | Value | Reduced Cost |
| X5 | 0.000000 | 1.000000 |
| X10 | 0.000000 | 1.000000 |
| X20 | 2.000000 | 1.000000 |
| X50 | 1.000000 | 1.000000 |
| X100 | 0.000000 | 1.000000 |
| X200 | 1.000000 | 1.000000 |
| X500 | 0.000000 | 1.000000 |
| X1000 | 0.000000 | 1.000000 |
| X2000 | 0.000000 | 1.000000 |
| X5000 | 1.000000 | 1.000000 |
| X10000 | 1.000000 | 1.000000 |
| X20000 | 38.00000 | 1.000000 |
| | | |
| Row | Slack or Surplus | Dual Price |
| 1 | 0.000000 | 0.000000 |
| 2 | 44.00000 | -1.000000 |

A feladat optimális megoldása alapján legkevesebb 44 címlettel fizethetjük ki ezt az összeget, 38 darab 20 000, 1 darab 10 000, 1 darab 5 000, 1 darab 200, 1 darab 50 és 2 darab 20 Forintos címlettel.